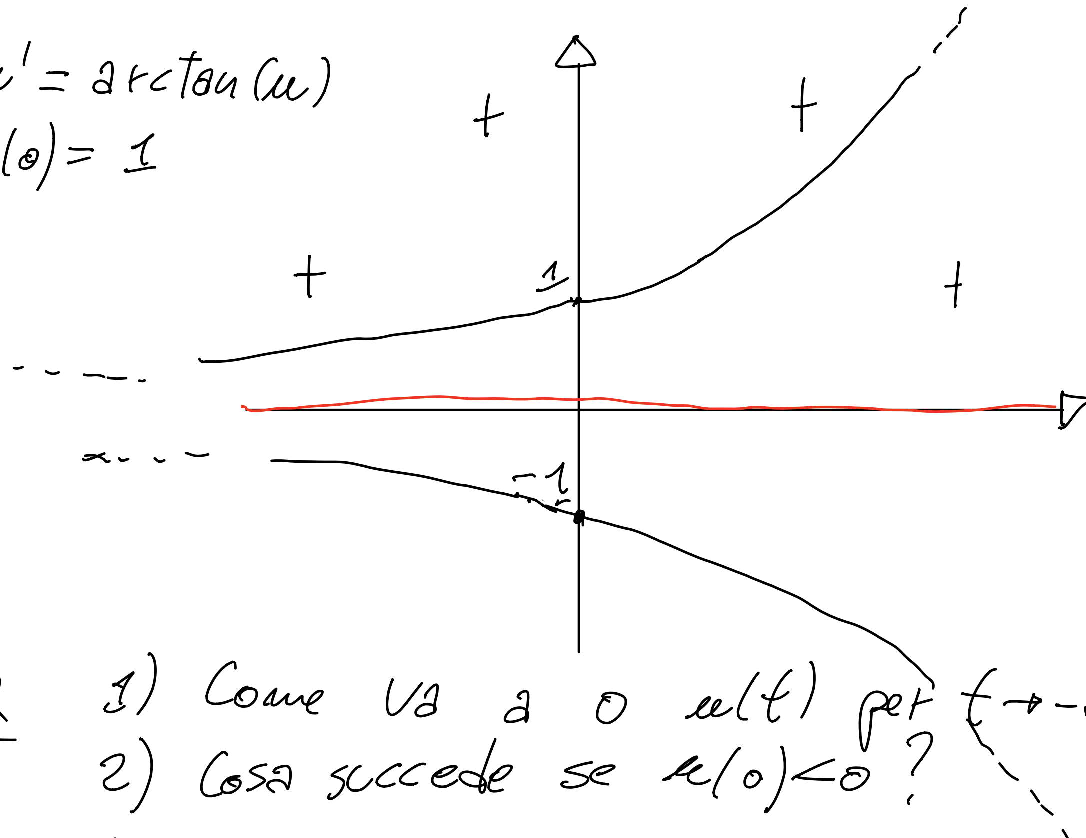
$$\begin{cases} u' = \arctan(u) \\ u(0) = 1 \end{cases}$$



Q 1) Come va a 0 $u(t)$ per $t \to -\infty$?

2) Cosa succede se $u(0) < 0$?

A 1) aspettiamo ...

2) Supp. $u(0) = -1$.

Dico che se u risolve per $u(0)=1$

$\Rightarrow$ $-u$ risolve per $u(0)=-1$.

Devo verificare che, se u soluzione per $u(0) = K$

$\Rightarrow v = -u$ è soluzione per $u(0) = -K$.

u_a $\quad u' = \arctan u$

$v' = (-u)' = -u' = -\arctan(u) =$

arctan dispari

$= \arctan(-u) = \arctan(v)$.

Inoltre $v(0) = -u(0) = -K$.

$\Rightarrow$ $v = -u$ risolve pbm di Cauchy

$$\begin{cases} v' = \arctan(v) \\ v(0) = -K \end{cases}$$

1) Come va $u(t) \to 0$ per $t \to -\infty$?

Idea <u>non</u> formale: per $t \to -\infty$

$u(t) \to 0 \Rightarrow \arctan(u) \overset{\text{Taylor}}{\sim} u$

$\Rightarrow u' = \arctan(u) \sim u$

Ma $K \cdot e^t$ risolve $u' = u$

Quindi ...

FORMALMENTE: Voglio dire che

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{u(t)}{e^t} = K \in \mathbb{R} \quad (\neq 0)$$

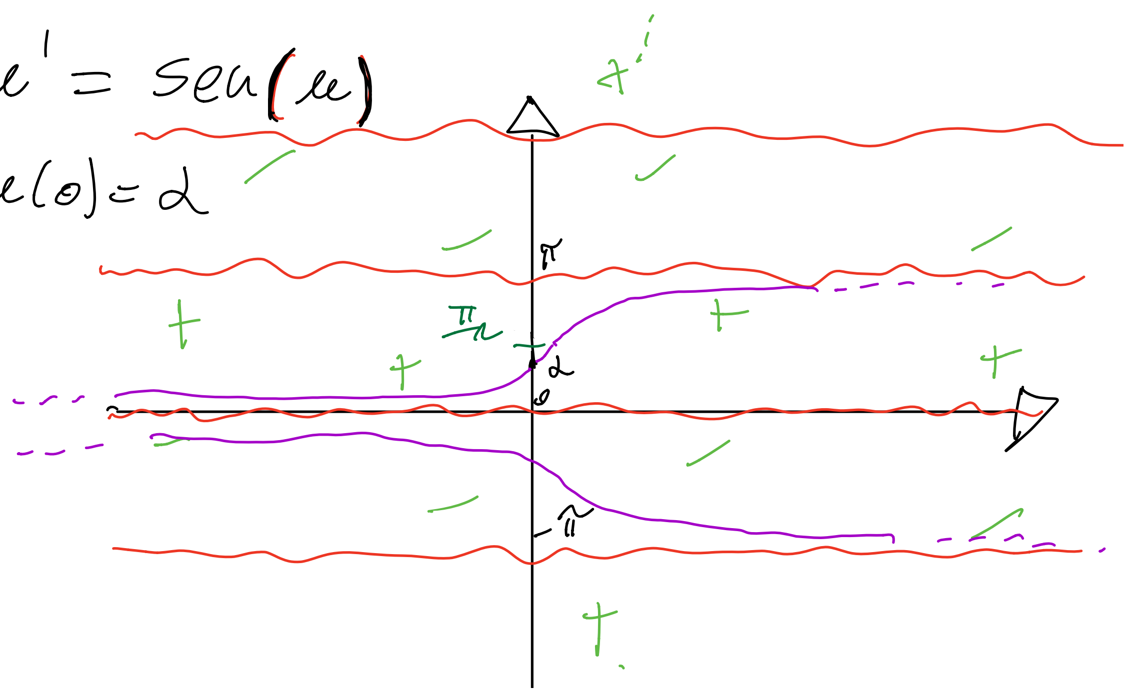
$$\iff \lim_{t \to -\infty} \frac{\log(u(t))}{\log(e^t)} = k \in \mathbb{R} \ (\neq 0).$$

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{\log(u(t))}{t} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{\underset{\text{Hôpital}}{=}} \lim_{t \to -\infty} \frac{u'(t)}{u(t)} =$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \frac{\arctan(u(t))}{u(t)} \overset{\substack{\text{LIM} \\ \text{NOTEVOLE} \\ \uparrow}}{\underset{u(t) \to 0}{=}} 1.$$

$$\boxed{\lim_{t \to -\infty} \frac{\log(u)}{t} = k \iff \lim_{t \to -\infty} u = \lim_{t \to -\infty} k \cdot e^t}$$

$$\begin{cases} u' = \operatorname{sen}(u) \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$



FATTO 0 $\operatorname{sen} u$ Lip $\Rightarrow$ Esist + UNICITÀ

FATTO 1 $|\operatorname{sen} u| \leq 1 \Rightarrow$ Esist globale soluzioni.

FATTO 2 $u(t) \equiv k\pi$ è soluz. $\forall k \in \mathbb{Z}$

FATTO 3 se $u(t)$ soluzione con $u(0) = \alpha$

$\Rightarrow v(t) = u(t) + 2\pi$ soluzione per $u(0) = \alpha + 2\pi$

Dim. $v(t)' = u'(t) = \operatorname{sen}(u(t))$

$= \operatorname{sen}(u(t) + 2\pi) = \operatorname{sen}(v(t))$

$v(0) = u(0) + 2\pi = \alpha + 2\pi$

$\Rightarrow$ risolve $\begin{cases} v' = \operatorname{sen}(v) \\ v(0) = \alpha + 2\pi \end{cases}$

Quindi posso restringermi a $\alpha \in (-\pi, \pi)$.

FATTO 4 se $u(t)$ soluzione per $u(0) = K$

$\Rightarrow -u(t)$ soluzione per $u(0) = -K$.

stessa dim. di prima, sfrutta sen dispari.

FATTO 5 Considero $\alpha = u(0) \in (0, \pi)$.

So che la sol. esiste globalmente, è crescente su tutto $\mathbb{R}$ e per monotonia $\exists \lim_{t \to \pm\infty} u(t)$.

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = \ell \in [\alpha, \pi]$$

$$\lim_{t \to +\infty} u'(t) = \lim_{t \to +\infty} \operatorname{sen}(u(t)) =$$

$$= \operatorname{sen}(\ell). \quad \left(\text{In partic. } \exists \lim_{t \to +\infty} u'(t)\right).$$

Teorema asintoto $\Rightarrow$

$$\lim_{t \to +\infty} u'(t) = \operatorname{sen}(\ell) = 0$$

$$+ \ \ell \in [\alpha, \pi] \Rightarrow \ell = \pi$$

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = \pi.$$

Analogamente $\lim_{t \to -\infty} u(t) = 0$.

FATTO 6 CONCAVITÀ

$$u'' = (\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u .$$

$$u(0) = \alpha \in (0, \pi) \qquad = \underbrace{\operatorname{sen} u}_{>0} \cdot \underbrace{\cos u}_{\substack{>0 \text{ se } u < \frac{\pi}{2} \\ <0 \text{ se } u > \frac{\pi}{2}}} .$$

FATTO 7 $u \in C^\infty(\mathbb{R})$

FATTO 8 $\displaystyle \lim_{t \to -\infty} \frac{\log(u(t))}{t} \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{\text{Hôp}}{=} $ lim. cot

$$= \lim_{t \to -\infty} \frac{u'(t)}{u(t)} = \lim_{t \to -\infty} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} \stackrel{+}{=} 1 .$$

$\Rightarrow$ Va a 0 come e^t.

——— o ——— o ———

Soprasoluzioni e sottosoluzioni

Consideriamo $u' = f(t, u)$.

Def. Diciamo che $v : (a,b) \to \mathbb{R}$ è sottosoluzione se

$\forall t \in (a, b) \quad v'(t) \leq f(t, v(t))$.

Se invece $\quad v' \geq f(t, v(t))$

v si dice soprasoluzione.

(Generoso)

Teorema $\quad u' = f(t, u)$, $\quad f$ lipschitz.

$v : [t_0, t_0+\delta) \to \mathbb{R}$ soprasoluzione stretta e

$\exists \ t_0$ t.c. $\quad v(t_0) \geq u(t_0)$

u definita almeno in $[t_0, t_0+\delta)$ & soluzione.

$\Rightarrow \quad v(t) > u(t) \quad \forall t \in (t_0, t_0+\delta)$.

(Dove la soluzione e la sopra-sol. esistono in $(t_0, t_0+\delta)$!).

Se soluzione e sopra soluzione esistono in $[t_0, +\infty)$ allora

$v(t) \geq u(t) \ \forall t \in (t_0, +\infty)$.

Uso PRATICO

$\{ u' = f(t, u)$

$\big\} u(0) = u_0$.

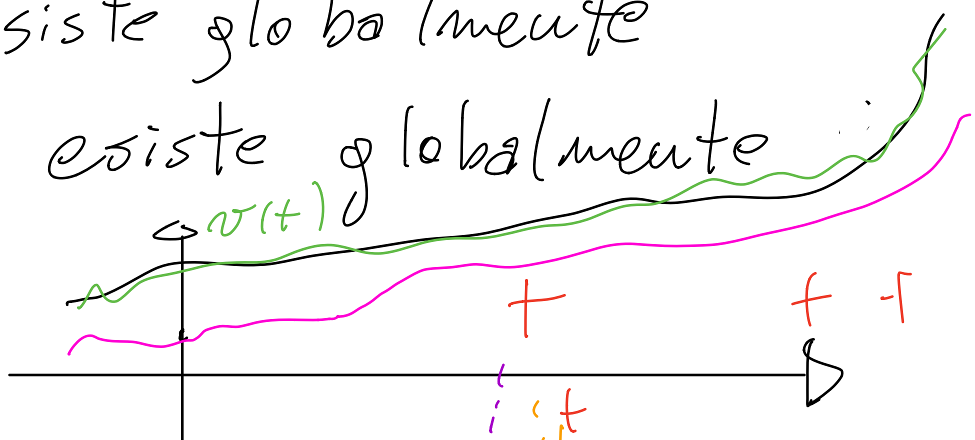
Supponiamo che $f(t,u) \geq 0$ per $t \geq a$..

e u soluz. non può uscire dall'insieme di def.

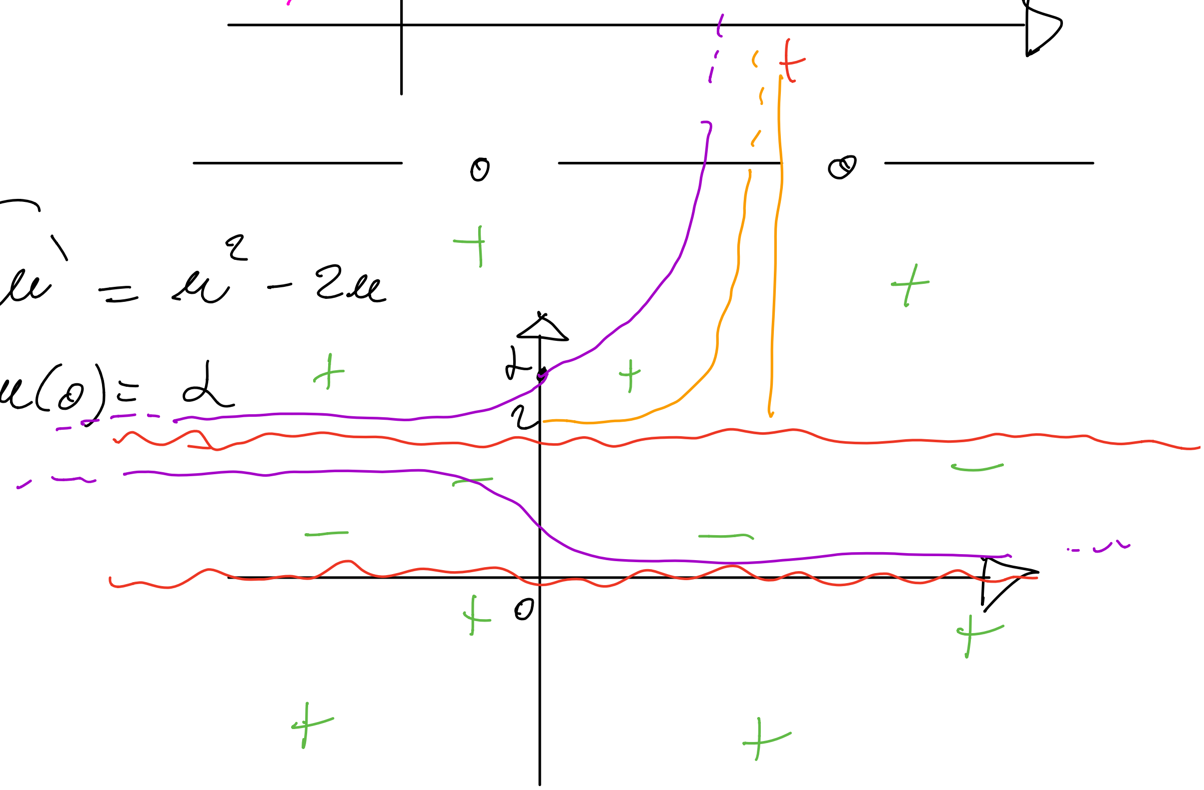
$v(t)$ soprasoluzione con $v(0) \geq u_0$

$\forall v$ esiste globalmente

$\Rightarrow u$ esiste globalmente



$$\begin{cases} u' = u^2 - 2u \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$



$\boxed{\text{FATTO 0}}$ $u^2 - 2u$ è loc. lipsch (+cont)

$\Rightarrow$ ho esistenza e unicità.

$\boxed{\text{FATTO 1}}$ $u \equiv 0$ e $u \equiv 2$ sono sol.

$\boxed{\text{FATTO 2}}$ per $\alpha \in (0, 2)$

u è decrescente (su tutto $\mathbb{R}$)
+ esiste globalmente.

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = \ell \in (\alpha, 0)$$

$$\lim_{t \to +\infty} u'(t) = \ell^2 - 2\ell \Rightarrow \text{esiste}$$

$\underset{\text{Teo. asintoto}}{\Rightarrow}$ $\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0$

$+ \lim_{t \to -\infty} u(t) = 2$.

studiare concavità: esercizio.

$\boxed{\text{FATTO 3}}$ $u(0) > 2$.

u è monotona crescente,
e "nel passato" (per $t < 0$)

esiste $\forall t$ negativo.

esiste per monotonia

$$\lim_{t \to -\infty} u(t) = \ell \in [2, \alpha]$$

$$\lim_{t \to -\infty} u'(t) = \ell^2 - 2\ell \quad \text{(esiste)}$$

Teo. asintoto $\Rightarrow \ell^2 - 2\ell = 0$

$\Rightarrow \ell = 2 \Rightarrow \lim_{t \to -\infty} u(t) = 2.$

$\boxed{\text{FATTO 3bis}}$ Cosa succede per $t \geq 0$?

$$u' = u^2 - 2u$$
$$u(0) = \alpha > 2$$

PARENTESI
$$\begin{cases} u' = k \cdot u^2 & k \geq 0. \\ u(0) = \alpha \geq 0. \end{cases}$$

$$\frac{u'}{u^2} = k \Rightarrow \int \frac{du}{u^2} = \int k \cdot dt$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{u} = kt + c$$

$$\frac{1}{u} = c - kt \quad \left(-c^{\text{in realtà}} \dots\right)$$

$$u(t) = \frac{1}{c-kt}.$$

$$u(0) = \alpha > 0$$

$$\frac{1}{c} = \alpha \Rightarrow c = \frac{1}{\alpha} > 0$$

$c > 0 \Rightarrow$ per $t = \frac{c}{k}$.

$u(t)$ ha un asintoto verticale

Date le scoperte nella "parentesi",

se trovo un $\beta > 0$ t.c.

$$u^2 - 2u \geq \beta u^2 \quad \forall u \geq u_0$$

Allora le soluzioni di

$v' = \beta v^2$ sono sottosoluzioni

di $u' = u^2 - 2u$

Ma le soluzioni di $v' = \beta v^2$ per la parentesi hanno blow-up (as. vert.) in tempo finito.
Dunque anche le soluzioni di $u' = u^2 - 2u$ avranno blow up in tempo finito.

Quindi devo solo trovare un β t.c. $u^2 - 2u > \beta u^2 \ \forall u \geq u_0 = \alpha > 2$.

$$\iff 1 - \frac{2}{u} > \beta > 0 \quad >2. \quad \text{in } [u_0, +\infty)$$

$1 - \frac{2}{u}$ è decrescente per u positivi ed ha max in u_0 PARI A $1 - \frac{2}{u_0}$.

$1 - \frac{2}{u_0} > 0$ perché $u_0 > 2$.

$\Rightarrow \exists\ \beta$ che sto cercando (p.es. $\left(1 - \frac{2}{u_0}\right) \cdot \frac{1}{2}$).

Esercizio Vedere che succede se $\alpha < 0$.